Die Gestaltungen der Ozeanwellen

in einfachen und zusammengesetzten (parallelen und gekreuzten) Zügen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

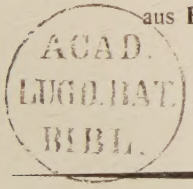
einer

hohen philosophischen Fakultät der Universität Rostock

vorgelegt von

Gustav Bonwitt

aus **Berlin** (Rodenberg).



Rostock.

Universitäts-Buchdruckerei von Adlers Erben, G. m. b. H.

1905.

Referent: Herr Prof. Dr. phil. et med. L. Matthiessen.

Meinen Eltern!

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552723_0097

Inhalt.

Einleitung: Historisches.

I. Teil: Die Entstehung der Ozeanwellen.

II. Teil: Die Dimensionen der Ozeanwellen.

III. Teil: Die Theorie der Ozeanwellen.

IV. Teil: Die Zusammensetzung mehrerer Wasserwellen.

Einleitung.

Schon von den alten Griechen ist die dauernde Bewegung des Meeres in ihren mannigfachen Formen beobachtet worden, denn bereits im Homer kommen vielfach Andeutungen über diese Meeresbewegung vor, so auch in folgenden Zeilen[1]):

„So wie unter dem West hinschauet ins Meer ein Gekräusel
Wann er zuerst, und dunklere Flut sich erhebet."

Auch Aristoteles beschäftigte sich mit diesem Gegenstande, indem er u. a. die Fragen aufstellte[2]), warum die Wellen zuweilen früher ankommen als der Wind, oder: warum sie Vorboten eines Sturmes sind.

Die erste wissenschaftliche Beobachtung auf exakt mathematischer Grundlage stammt wohl von Newton[3]); allerdings haben die ihr folgenden Nachforschungen von Lagrange, La Place, Gerstner und Poisson

---

[1]) Ilias 7,63 in der Voßschen Übersetzung.

[2]) Probleme XLI. p. 931 a 35, 932 b 25, 934 b 4.

[3]) Phil. Nat. Prim. Math. Lib. II Sect. VIII.

ergeben, dass die Newtonschen Beobachtungen zur Basis einer modernen Theorie der Wellenbewegung nicht ausreichen.

So findet sich z. B. nach der Meinung der Gebrüder Weber bei Newton nichts über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen, vielmehr hat er nur nachgewiesen, mit welcher Geschwindigkeit bei der stehenden Schwingung sich abwechselnd ein Flüssigkeitskegel in einen Trichter, und dieser sich in einen Kegel verwandelt; sie passt daher nur auf die stehende Schwingung.

Fast gleichzeitig mit Newton stellt der Graf von Marsili im Golf von Lion Messungen an Wellen an[1]).

Bald nachher schreibt La Place über Meereswellen[2]).

Weitere Arbeiten über dies Thema sind von Lagrange[3]) und Flaugergues[4]) gemacht worden. Diese letztere unterscheidet sich von den vorhergehenden dadurch, dass sie sich auf gemachte Beobachtungen der Wellen gründet.

Brémontier weist darauf hin[5]), dass nach seinen Untersuchungen über die Wellenbewegungen vor allem

---

[1]) Histoire physique de la mer, p. 481.

[2]) Hist. d. l'Acad. Roy. d. Sc. Année 1776. p. 542. „Sur les ondes.".

[3]) Nouv. Mém. de l'Acad. Roy. des Sc. Année 1786, p. 181.

[4]) Verhandelingen mitgegeven door de Hollandsche Maatsch. der Weetenschappen te Harlem, XXIX Deel, p. 131.

[5]) Journal de Phys. par Delamétherie, Tome LXXIX, p. 73. „Recherches sur le mouvement des ondes."

auch die Übertragung der Bewegung der oberflächlichen Partien des Wassers sich auf die unteren Teile fortpflanzt.

Eine weitere ausführliche Theorie der Wasserwellen ist die Gerstnersche[1]).

Ferner beschäftigen sich sehr eingehend mit den Wasserwellen die Brüder Weber[2]).

Aus dem Jahre 1827 stammt die Preisarbeit A. Cauchys: „Théorie de la propagation des ondes à la surface d'une fluide pesant d'une profondeur indéfinie[3])."

In die Jahre 1867—70 fallen die Messungen des Lieutenant Pâris an Bord der französischen Kriegsschiffe „Dupleix" und „Minerve"[4]). Seine Beobachtungen dehnen sich über 205 Beobachtungstage aus, in welchen er 4000 Wellen gemessen hat, und zwar täglich mindestens zehn.

Die bekannte „Challenger Expedition" brachte unter ihren reichen Ergebnissen auch genauere Messungen an Wellen, die in der Nähe der Crozet-Inseln und Kerguelen stattgefunden haben[5]).

In den siebziger Jahren des vorigen Jahrhunderts ferner stellt William Thomson unter anderem in

---

[1]) Gilberts Ann. d. Phys., 32. Bd. 1809, p. 412. „Theorie der Wellen samt einer daraus abgeleiteten Theorie der Deichprofile."

[2]) Wellenlehre von den Brüdern Ernst Heinr. und Wilh. Weber.

[3]) Mém prés. par. div. sav. à l'Acad. des Sc., Tome I, 1827, p. 3.

[4]) Revue mar. et col. Vol. XXXI, Paris 1876, p. 111.

[5]) Challenger Reports. Narrative vol. I, p. 330.

seinen Untersuchungen die Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wasserwellen auf[1]).

Von Ludwig Matthiessen[2]) und seinen Schülern Ahrendt[3]), Rieß[4]) und Ochsé[5]) stammen die ersten Experimente, welche die Genauigkeit dieser Formel bewiesen.

Über das Verhältnis der Wellenhöhe zur Windgeschwindigkeit haben wir sehr einfache Untersuchungsergebnisse vom Admiral Coupvent des Bois[6]).

Sehr eingehend über Meereswellenbeobachtungen hat ferner Krümmel geschrieben[7]).

In dem kürzlich erschienenen Lehrbuch der kosmischen Physik von Arrhenius[8]) sind die Ergebnisse der neueren Arbeiten über Meereswellen zusammengestellt, wie auch eine analoge Zusammenfassung sich bei Rottok findet[9]).

---

[1]) Phil. Mag. 1871. „Waves under motive power of Gravity and Cohesion jointly without wind."

[2]) Ann. d. Phys. und Chemie, Neue Folge, Bd. XXVIII, 1889, p. 118.

[3]) Repert. d. Phys. von Exner, 121, 1888.

[4]) l. c. 1889.

[5]) l. c. 1890.

[6]) Comptes Reudus de l'Acad., 1866, Tome 62, p. 82.

[7]) v. Boguslawski-Krümmel, Handbuch d. Oceanographie, Bd. II.

[8]) Kosmische Physik, 1903, p. 436.

[9]) Ann. d. Hydrogr. und marit. Meteorologie, 1903, p. 329.

I.

Über die Entstehung der Ozeanwellen.

Eine Wassermasse wird durch jede Störung ihres Gleichgewichtes in Schwingungen versetzt. Diese Schwingungen gehen so vor sich, daß jedes aus der Ruhelage gebrachte Wassermolekül mit gleichförmiger Geschwindigkeit nahezu Kreise oder Ellipsen beschreibt.

Diese Bewegung pflanzt sich so auf die Nachbarpartikelchen fort, dass diese denselben Weg zurücklegen, wobei sie etwas später als jedes vorhergehende ihre Schwingungsbahn beginnen.

Die bis zum Beginn der Bewegung horizontale Oberfläche nimmt durch diese Schwingungen eine differente Gestalt an, die uns eben als „wellenförmig" erscheint.

Die Bewegung ist kontinuierlich und nach einer bestimmten Richtung hin verlaufend; es ist hiermit jedoch eine Verschiebung der Wassermasse nicht verbunden, wie man den optischen Phänomenen nach wohl anzunehmen geneigt sein könnte, vielmehr ist die Fortpflanzung und periodische Veränderung lediglich auf die Form der Welle beschränkt.

Eine der auffallendsten optischen Erscheinungen ist die verschiedene Färbung der Wasseroberfläche je nach den zur Zeit der Beobachtung gegebenen Bedingungen.

Dunkel erscheint das Meer nach den ersten Stössen des in die Niveaufläche einsetzenden Windes. Es ist dies eine Tatsache, deren Grund schon Aristoteles zu finden versuchte[1]).

Die Grundlage dieser Wirkung ist in der Nähe betrachtet eine durch den Wind hervorgebrachte leichte Kräuselung der Wasseroberfläche, aus sehr kleinen Wellen bestehend. Diese Wellenkämme erscheinen aus der Vogelperspektive betrachtet als Kreissektoren mit sehr grossem Radius.

Etwas heller ist die Meeresoberfläche bei wachsender Intensität des Windes gegen Mittag; in ihrer ganzen Ausdehnung hat sich jetzt die Wasseroberfläche mit den „embryonalen Wellen“ (nach Scott Russel[2]) auch „kapillare Wellen“) bedeckt, deren Kammform jetzt gradliniger ist („Wellenzüge“).

In der Norm flaut der Wind gegen Abend ab und die Erscheinungen sind denen des Vormittags wieder ähnlicher.

Für die merkwürdige Tatsache, dass diese embryonalen Wellen als direkte Wirkung der horizontal treibenden Kraft des Windes an der Oberfläche des

---

[1]) Aristoteles, Problemata, p. 932 b 28 ff.

[2]) Report. Brit. Assoc., 1845, p. 307, 376.

Wassers ihren Ursprung nehmen, gibt Muncke[1]) folgende Ursache an:

„Der Wind weht nicht gleichmässig, wie es beim Anblick der Wolken den Schein hat, sondern auch in Wellenform (absatzweise und in Unterbrechungen)."

Erklärungsversuche für dieses Phänomen stammen schon von Benjamin Franklin, welche die Brüder Weber zu folgender Fassung benutzt haben[2]):

„Die Luftstösse scheinen unter sehr spitzem Winkel auf das Wasser aufzutreffen und bringen eine doppelte Wirkung hervor, indem sie es teils niederdrücken, teils in der Richtung, in der sie sich selbst bewegen, fortschieben, was man sich durch die Zerlegung der einfachen Kraft in eine horizontal und vertikal wirkende leicht erklären kann. Franklins Hypothese über den Vorgang, wenn sich der Wind am Wasser reibt und Wellen erregt, hat viel für sich. Sie lässt sich etwa folgendermassen darstellen: Die Luft wird von dem Wasser angezogen, wie man daraus ersieht, dass alles Wasser Luft in sich schliesst, und sie, wenn sie aus ihm durch Kochen ausgetrieben worden, begierig wieder einsaugt.

Deswegen haftet sie auch an dem Wasser, über dem sie hinstreicht, und schiebt die Teilchen, die sie an der Oberfläche berührt, mit fort. Diese aber hängen selbst wieder mit den unter ihnen gelegenen Wasserteilchen zusammen und werden daher durch sie etwas

[1]) Gehlers physik. Wörterb., Artikel: Meer. p. 1738 (70).

[2]) Wellenlehre § 25.

zurückgehalten und müssen diesen deswegen einen Teil ihrer Bewegung mitteilen und können folglich der Luft nicht mit gleicher Geschwindigkeit folgen.

Die Luft reisst sich also, wenn der Druck der nachfolgenden Luft einen gewissen Grad erreicht hat, von den Wasserteilchen los, an denen sie haftete, und gleitet über das Wasser hin, bis die Spannung so vermindert ist, dass die Luft von neuem, während sie sich nur langsam fortbewegt, am Wasser zu haften anfängt und sich die erwähnte Erscheinung wiederholt.

Hierdurch wird allerdings erklärlich, warum die über das Wasser hinstreichende Luft „ruckweise" das Wasser stösst und davon abgleitet, und dadurch eine grosse Menge ganz kleiner Unebenheiten auf dem Wasser hervorbringt.

Durch diese Reibung der Luft an dem Wasser entstehen aber nur die „allerkleinsten" Wellen, welche das Wasser der Eigenschaft zu spiegeln berauben und selbst die Oberfläche grösserer Wellen bedecken."

Am ungezwungensten erscheint uns eine weitere Erklärung von Scott Russel[1]).

Nach ihm entstehen die „kapillaren Wellen" durch Zusammenhaften der obersten Moleküle zu einer oberflächlichen Schicht, welche auf die ganze Flüssigkeit wie eine Membran wirkt, welche als „Oberflächen- oder Flüssigkeitshäutchen" bezeichnet wird.

Dieses Häutchen wirkt äusseren Kräften gegenüber wie eine selbständige, der Flüssigkeit zwar adhärente,

[1]) Report. Brit. Assoc., 1845, p. 307 u. 376.

aber von ihr unabhängige Membran, sie kann sich in Falten legen, jedoch erst dann, wenn der Wind eine bestimmte Stärke erreicht hat.

Experimentell ermittelte zuerst L. Matthiessen[1]) diese Oberflächenspannung nach einer Methode, die den andern bisher benutzten Methoden gegenüber den Vorteil hat, dass sie sich durch die Einfachheit der zu benutzenden Apparate hervorhebt.

Durch eine Stimmgabel, an deren Enden dünne, zugespitzte Metalldrähte befestigt sind, die in eine Flüssigkeit tauchen, werden Wellen erzeugt und so die Kelvinsche Formel[2])

$$v^2 \quad g\left(\frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi}{\lambda} T\right)$$

auf ihre Richtigkeit hin geprüft. Auch L. Grunmach[3]) beschäftigte sich mit diesem Nachweise auf experimentellem Wege und richtete seine Untersuchungen auf sehr verschiedene Flüssigkeiten.

Das Wachsen dieser kapillaren Wellen erklärt sich nun aus dem Grösserwerden des Windes. Es ist ferner erklärlich,

1.) dass die ganze Wassermasse in einem Medium von so geringer Elastizität und unter den für jede Flüssigkeit geltenden Bedingungen der Kontinuität Schwingungen ausführt, die sich an der Wasseroberfläche als Wellen manifestieren, auch wenn das Wasser nur durch ganz kleine molekulare Bewegungen erschüttert wird,

[1]) Pogg. Ann., 134. Bd., 1868.

[2]) Phil. Mag., 1871, p. 374.

[3]) Physik. Zeitschr. IX, p. 3, 1902.

2.) dass bei der minimalen Reibung diese Wellen sehr lange persistieren können selbst wenn die causa movens, der Wind, ausgeschaltet ist. In diesem letzteren Falle bezeichnet man die Wellenform als „Dünung".

Unter Dünung verstehen wir also diejenige Welle, die als Nachwirkung, zeitlich oder räumlich, von ihrer Ursache, dem Wind, getrennt beobachtet wird.

Als morphologisches Charakteristikum tritt uns bei der Dünung das rein trochoidale Profil entgegen, im Gegensatz zu den „Windwellen oder Seen".

Nach Scott Russel und Airy sind diese Seen, die dem sie erzeugenden Winde momentan unterliegen, „forcierte Wellen" die Dünungen, als den direkten Wirkungen entzogenen Wellenbewegungen „freie Wellen".

Pâris sagt über sie[1]): „Die Dünung ist oftmals als ein Anzeichen für Wind gehalten worden, und die Richtung, woher sie kommt, kann unter Umständen eine Idee von derjenigen geben, woher der Wind wehen wird. Da eine Beziehung zwischen der Schnelligkeit der Wellen und der Windstärke vorhanden ist und diese letztere sich sehr gut in der Dünung konserviert, so kann man aus der Beobachtung dieser einige weitere Indizien entnehmen, welche gewiss nicht gerade positiv, aber zu andern sich fügend, sehr nützliche Winke liefern können.

Wenn beispielsweise die Dünung eine Geschwindigkeit von 12—13 m hat, ist es höchst wahrscheinlich,

[1]) Rev. mar. et col., 1871, p. 125, 19.

dass sie durch eine Reihe frischer und regelmässiger Brisen erzeugt ist, wie man sie im Passat oder Monsun trifft, und deren Vorläuferin sie sein kann. Eine Geschwindigkeit von 15 m würde eine steife Brise, und eine solche von 17—18 m einen richtigen Sturm ansagen."

Über das Vorkommen der Dünung schreibt Krümmel[1]): „Typisch ist die hohe und lange Dünung in den Windstillen der Rossbreitenzone beider Hemisphären; auf der nördlichen erzeugt durch die in Böen wehenden Nordwestwinde an der Rückseite barometrischer Depressionen, im Atlantischen Ozean, besonders im stürmischen Meer zwischen Neufundland und Island, von dort häufig bis in den Nordostpassat, bisweilen sogar bis in die südliche Hemisphäre sich fortpflanzend.

Nach deutschen Schiffsjournalen überschritt Ende März 1881 eine vom Golfstrom aufgeworfene Dünung sogar den Äquator und drang in südliche Breiten vor.

Nicht minder weit treiben die südwestlichen Orkanböen der hohen südlichen Breiten ihre Dünung nordwärts. Ebenso entsenden die Passate in der äquatorialen stillen Zone von beiden Seiten ihre Dünungen, welche einander durchkreuzen."

Über dies Durchkreuzen mehrerer Wellensysteme auf ein und derselben Wassermasse sagt Krümmel[2]): „Da die einzelnen Wasserteilchen sich nicht zwischen einander hindurchbewegen (was eine starke Reibung

[1]) Oceanogr. Bd. II, p. 37, 8.

[2]) Oceanogr. Bd. II, p. 10, 43.

erzeugen würde), sondern immer von ihrem alten Nachbarteilchen umgeben bleiben, können die Wasserfäden jedesmal die Gestalt annehmen, welche ihre Stellung zu den verschiedenen Wellensystemen verlangt.

Wäre das Wasser eine vollkommene Flüssigkeit (d. h. ohne alle innere Reibung), so würde auch diese sich durchkreuzende Wellenbewegung bis in Ewigkeit fortdauern, so lange die Voraussetzung der Theorie „unendlich grosse Tiefe“ und „nach allen Seiten unbegrenzte Ausdehnung des Wassers“ zutrifft, was ja in der Natur nicht ganz der Fall ist.“

Nach Arrhenius[1]) entstehen bei dieser Durchkreuzung durch Interferenz Wellen, die im Gegensatz zu den gewöhnlichen, nach parallelen Kämmen geordneten, „Hügel-“ oder „Pyramidenform“ annehmen.

Nach Mitteilungen des Herrn Professors Matthiessen beobachtete dieser im Sommer 1903 in der Ostsee bei Müritz ebenfalls zwei sich kreuzende Dünungen.

Marsili schreibt über diese Durchkreuzung folgendes[2]): „Im offenen Meer, wo die Winde ein freies Feld finden, werden die Wellen, die bei einem gewöhnlichen Sturm kaum höher als sechs Fuß sind, bisweilen von enormer Mächtigkeit.

Durch Vereinigung mehrerer sehr dicht aufeinander folgender Wellen, die sich fortwährend durchkreuzen, überstürzen sie sich und bilden Sturzwellen, die ganz ungewöhnliche Unwetter verursachen.“

[1]) Kosm. Physik, p. 439.

[2]) Hist. phys. de la mer, p. 48, 25.

II.

Über die Dimensionen der Ozeanwellen.

Was nun die Dimensionen der Ozeanwellen betrifft, so liegen vielfach Messungen vor, auf deren Basis wir uns ein annäherndes Bild von deren Größe machen können.

Pâris beschreibt seine Eindrücke in folgender Weise[1]): „Die Wellenhöhe wächst ziemlich schnell in dem Masse, wie der Wind stärker wird; sie ist im hohen Masse von vorhandener offener und zugleich tiefer See in ihrer Ausbildung abhängig; sobald sich auf hoher See eine starke Brise erhebt, erreicht sie leicht 5 m. Sie ist von allen Wellenmassen dasjenige, welches am schnellsten sich vermindert und abfällt, sobald der Wind aufgehört hat."

„Die Wellenlänge[2]) ist sehr variabel und wechselt zuweilen vom einfachen bis zum dreifachen bei zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Wellen. Wenn der Wind sich erhebt, ist sie anfangs wenig beträchtlich, darauf wächst sie schneller als die Wellenhöhe, und

[1]) Rev. mar. et col. Vol. XXXI, p. 122, 1.

[2]) Rev. mar. et col. Vol. XXXI, p. 123, 11.

während mehrerer Tage vergrößert sich das Verhältnis dieser beiden Werte in der Weise, daß oft die See am Beginn eines Sturmes hohler läuft als an seinem Ende, während dabei die Windstärke konstant blieb."

„So sahen wir im Osten des Kaps der Guten Hoffnung infolge starker Weststürme, welche vier Tage hindurch mit auffallender Regelmäßigkeit andauerten, die Höhe der Wellen von 6 nur auf 7 m steigen, während die Länge derselben am ersten Tage 113, am vierten dagegen 235 m erreichten."

„Die Geschwindigkeit [1]) ist das am wenigsten veränderliche unter den Wellenelementen. Sie ist neben der Wellenlänge auch dasjenige, welches am besten und längsten andauert, wenn nach dem Aufhören des Windes der Seegang sich in Dünung verwandelt . . . In der Tat kann man nur selten auf hoher See beobachten, dass eine Welle eine andere überholt, was doch alle Augenblick der Fall sein müsste, wenn ein auch noch so geringfügiger Unterschied in ihrer Geschwindigkeit vorhanden wäre. Sobald der Wind sich erhebt, wächst die Geschwindigkeit schrittweise und erreicht bald die Grösse, welche sie fast ganz beibehält, bis die Wellenbewegung sich beruhigt.

Admiral Mottez mass als längste Welle [2]) im Atlantischen Ozean etwas nördlich vom Äquator in ca. 30° westlicher Länge eine Dünung von 23 Sekunden

[1]) Rer. mar. et col. Vol. XXXI, p. 123, 34.

[2]) Bertin, Mém. Soc. Cherbourg, XVII, 1873, p. 265.

Periode; ihre Länge betrug 284 m und die Geschwindigkeit 35,8 m pro Sekunde. Die Geschwindigkeit ist im Verhältnis zu den andern Daten zu groß, sie ergibt sich berechnet als 12,4 m pro Sekunde.

Eine weitere Messung stammt von James Clark Ross vom 29. Februar 1840 am Kap der Guten Hoffnung. Die angegebenen Masse betrugen: Höhe - 7 m, Länge — 580 m, Geschwindigkeit — 40 m pro Sekunde.

Weiter beobachteten französische Seeoffiziere Wellen [1]) im Golf von Biscaya, denen sie in maximo eine Länge von 400 m und eine Fortpflanzungsgeschwindigket von 21 m pro Sekunde beilegten.

Im Oktober 1879 mass Kapitän Chüden, Kommandant S. M. S. „Nautilus", Wellen 300—400 m lang, 10—11 m hoch und zwar südwestlich von Australien ($33^1/_2{}^0$ s. B., 107^0 ö. L.).

Aus den Pârisschen Messungen [2]) ist eine Aufzeichnung interessant aus dem Gebiet der Westwinde, wo Wellen von 400 m Länge (als höchstes Tagesmittel 235 m) und einer Periode von 17,4 Sekunden gemessen wurden.

Abercromby beobachtete Wellen [3]), deren größte eine Höhe von 14 m, eine Länge von 233 m, eine Geschwindigkeit von 21 m pro Sekunde und eine Periode von 16,5 Sekunden hatte.

---

[1]) Arago, Oeuvres tome IX, p. 550.

[2]) Rer. mar. et. col. Vol. XXXI (1876), p. 123, 17.

[3]) Phil. Mag. Vol. XXV, 1888, p. 269.

Die Geschwindigkeit ist wohl etwas zu groß, berechnet ergibt sie sich als 14,2 m.

Natürlich gelten für den Durchschnitt ganz andere Zahlen. Im offenen Ozean betragen nach Pâris[1]) die Durchschnittsmasse für die Länge 90—100 m, für die Geschwindigkeit 11—15 m und für die Periode 6—10 Sekunden.

Was die Wellenhöhe anbetrifft, so war die höchste Messung von Pâris[2]) am 25. Oktober 1867 auf der Fahrt von Kapstadt nach St. Paul 11,5 m. Als Tagesmittel erhielt er damals 9 m.

Schott gibt als höchstes Mass im offenen Ozean 15 m an[3]), jedoch sollen Wellen von über 10 m schon zu den Seltenheiten gehören.

Dagegen hat die Challenger Expedition nur eine Höhe von 7 m als maximum gemessen[4]); es war dies anfangs Januar 1874 zwischen den Crozetinseln und Kerguelen.

Marsili schreibt[5]): „Im offenen Meer . . . erhebt sich gewöhnlich das Wasser nur 5 oder 6 Fuß über seine Ruhelage."

Die von Pâris aufgestellte Tabelle[6]) der Maximal- und Minimalhöhen sei auch hier angeführt. Bezeichnen

[1]) Rer. mar. et col. etc., p. 121.
[2]) Rer. mar. et col. etc., p. 122, 12.
[3]) Petermanns Mitteilgn. 1893. Ergänzungsheft Nr. 109.
[4]) Challenger Reports. Narrat., vol. I, p. 330, 66.
[5]) Hist. physique de la mer., p. 48, 22.
[6]) Rev. mar. et col. etc. p. 119.

wir mit Krümmel[1]) die Maximalböschung der trochoidalen Wellen mit φ, so finden wir hierfür die Werte nach einer schiffsbautechnischen Formel folgendermassen:

$$\sin \varphi = 180^0 \frac{H}{\lambda}$$

$$\varphi = 180^0 \frac{H}{\lambda}$$

Meeresteil	Mittel	Max.	Min.	Mittleres Verhältn. von $\frac{\lambda}{H}$	φ ^{0}
Atlant. Passatgbt.	1,9	6,0	0	35,2	5
Südatlant. Westwde.	4,3	7,0	1	31,0	6
Indische „	5,3	11,5	2,8	21,5	$8^1/_3$
Indisches Passatgbt.	2,8	5,0	1	35,3	5
Ostchines. Meer	3,2	6,5	0	24,6	7
Westpazif. „	3,1	7,5	0	33,0	$5^1/_2$

Die Passate haben also eine sanftere Böschung als die Westwinde und selbst die Riesenwellen der hohen südlichen Breiten haben durchschnittlich keine steilere Böschung als 8—9 ^{0}.

Für die Nebenmeere sind die Dimensionen kleiner gefunden. Im Golf von Lion mass Graf Marsili[2]) als maximum 4,5 m.

Für die Ostsee ist die Maximalhöhe nach Krümmel 3 m.

[1]) Oceanogr., Bd. II, p. 49.

[2]) Histoire physique de la mer., p. 48, 22.

Schliesslich sei noch eine Schilderung von Pâris über die Grössenverhältnisse einer Dünung mitgeteilt[1]): „So wurden wir (im südlichen Indischen Ozean), nachdem am 31. Oktober 1867 die steife Südwestkühlte uns verlassen hatte, um von den Kalmen des Steinbocks ersetzt zu werden, . . . begleitet während dreier Tage von einer Dünung, die nicht der geringste Windhauch beeinflusste.

Die Südwestkühlte hatte eine regelmässige See von 4,5 m Höhe bei 143 m Länge (in Mittelmassen) und einer Geschwindigkeit von 15,3 m aufgeworfen. Sechzig Stunden später, 350 Seemeilen davon entfernt, besass die Dünung, die 13 Stunden gebraucht hatte, noch 15 m Geschwindigkeit und 135 m Länge.

Man kann also diese beiden Masse als unverändert ansehen, während die Wellenhöhe sich um die Hälfte vermindert hatte. An den letzten Tagen, welche diese lange Dünung und die gleichzeitige Windstille andauerte, wurde die Dünung von einer kleinen östlichen See gekreuzt, die kaum meterhoch war, dabei eine Geschwindigkeit von 7,3 m und eine Länge von 53 m hatte, d. h. fast dieselben Verhältnisse, die wir im vollentwickelten Passat vorfanden, als wir diesen am 3. November erreichten."

[1]) Rev. mar. et col. vol. XXXI, p. 124, 36.

III.

Über die Theorie der Ozeanwellen.

Bei der Wasserwelle beobachten wir eine primäre Hebung und eine sekundäre Senkung der Wassermasse, wobei eine vertikale Verschiebung der Wasserteilchen stattfindet. Wir werden jedoch einen auf der Oberfläche schwimmenden Körper keineswegs der Welle folgen sehen, vielmehr werden solche Teilchen vom Wellenkamm gering in Richtung der Welle fortgetrieben, sind sie aber im Wellental, so schwimmen sie die gleiche Strecke wieder zurück.

Mithin ergibt sich, dass die um den schwimmenden Körper befindlichen Wasserteilchen sich nicht nur heben und senken, sondern auch in horizontaler Richtung hin- und herschwingen. Die Wasserteilchen durchlaufen also eine kreisförmige, geschlossene Bahn, gelegen in der Fortschreitungsrichtung der Welle, also in einer Vertikalebene.

Diesen Bewegungsvorgang bezeichnen wir als Orbitralbewegung, bei welcher nicht die gleiche Geschwindigkeit, mit der die Welle selbst sich über das Wasser fortbewegt, stattfindet, sondern eine sehr viel

geringere. Somit unterscheiden wir zweierlei Bewegungen:

1) Die „oscillierende“ oder Orbitalbewegung“ der Wasserteilchen (v) und

2) die „fortschreitende“ der Wellenform (c).

Die Kurve des normalen Schnittes einer Welle ist eine „Trochoide“ oder „gedehnte Zykloide“, wie in folgendem gezeigt werden soll:

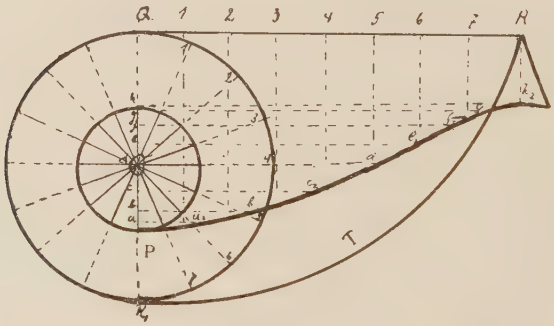


Fig. 1.

Diese Kurve wird von einem Punkte P einer Kreisscheibe QR_1 beschrieben, wenn diese der Geraden QR entlang rollt. Rückt nun der beschreibende Punkt P herunter bis zur Peripherie der Kreisscheibe (z. B. bis R_1), so beschreibt er die Kurve R_1TR, welche eine Zykloide darstellt. Es soll nun in folgendem die Gleichung der Trochoide abgeleitet werden.

Es seien M und M′ zwei Wassermoleküle. Die Kreise, deren Radien OA = OB sind, ihre Rollkreise. Während M′ sich noch in Ruhelage befindet auf der

Achse OX, hat M von der Abcissenachse aus schon eine Strecke seiner Bahn in der Zeit t zurückgelegt.

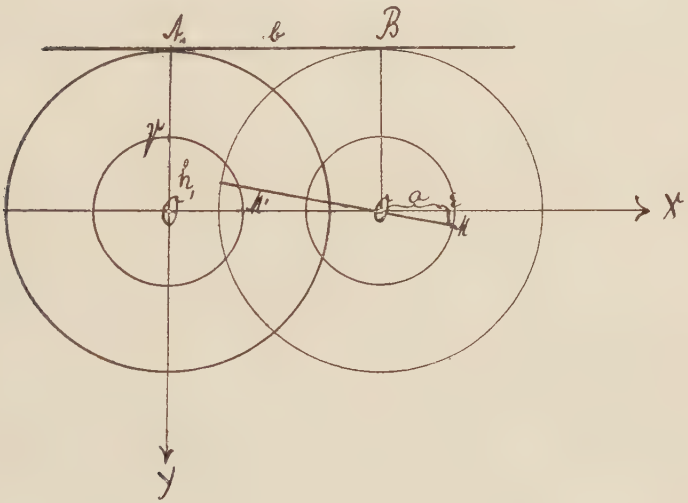


Fig. 2.

Nun finden folgende Beziehungen statt:

$$2\pi r : b \quad 2\pi : \alpha \; ; \; b = 2\pi r \frac{t}{\tau}$$

$$a = h \sin \alpha; \; \alpha = 2\pi \frac{t}{\tau}$$

$$\lambda = c\tau \quad ; \; \lambda = 2\pi r$$

$$x = a + b = 2\pi r \frac{t}{\tau} + h \sin 2\pi \frac{t}{\tau}.$$

Indem wir nun für $2\pi r = \lambda$ einsetzen erhalten wir:

$$1) \quad x = \lambda \frac{t}{\tau} + h \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

und ferner:

$$2)\quad y = h\cos\frac{2\pi t}{\tau}.$$

Wenn wir aus diesen letzten Gleichungen t eliminieren und die Arkusfunktion bilden, so erhalten wir:

$$\frac{1}{h^2}\left(x - \frac{\lambda}{2\pi}\arccos\frac{y}{h}\right)^2 = \left(\sin\frac{2\pi t}{\tau}\right)^2$$

oder umgeformt:

$$\text{I.}\qquad \left(\frac{y}{h}\right)^2 + \frac{1}{h^2}\left(x - \frac{\lambda}{2\pi}\arccos\frac{y}{h}\right)^2 = 1.$$

Dies ist die Gleichung der Trochoide.

Im Anschluss hieran mag nun im folgenden untersucht werden, in welchem Verhältnis bei der Wellenlänge der Trochoide der Abstand der Knotenpunkte steht, oder was ja dasselbe ist, wie gross die Länge des Berges in bezug auf die des Tales ist. Zu diesem Zwecke lösen wir die Gleichung I nach x auf und erhalten

$$\text{Ia.}\qquad x = \pm\sqrt{h^2 - y^2} + \frac{\lambda}{2\pi}\arccos\frac{y}{h}.$$

Bei einem Knotenpunkt ist $y = O$ und obige Gleichung geht in die Form über:

$$\text{Ib.}\qquad x = \frac{\lambda}{2\pi}\arccos O \pm h$$

arc cos O sei $= u$, dann ist $\cos u = O$, dies ist aber der Fall, wenn der Winkel die Werte

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi \ldots \text{ u. s. f.}$$

annimmt. Setzen wir diese Werte in Gleichung Ib ein, so ergeben sich für:

$$x_1 = \frac{\lambda}{4} + h,\ x_2 = \frac{3}{4}\lambda + h,\ x_3 = \frac{5}{4}\lambda + h,\ x_4 = \frac{7}{4}\lambda + h \ldots$$

$$x_n = \frac{2n-1}{4}\lambda + h,$$

welch letzteres sich nach der bekannten Formel $z = a + (n-1)d$ für das n-te Glied einer arithmetischen Reihe mit der Differenz $d = 2$ ergibt. Dies sagt aus: Die Welle würde sich theoretisch bis ins Unendliche in periodischer Reihenfolge fortbewegen, solange die gemachte Voraussetzung gilt: unendliche Tiefe im Verhältnis zur Wellenlänge und unbegrenzte Ausdehnung der Wasseroberfläche.

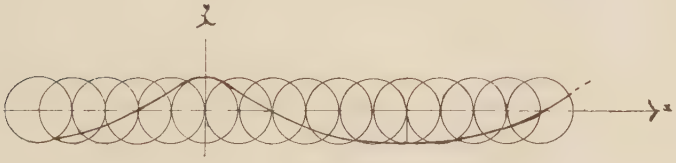


Fig. 3.

Greifen wir nun irgend eine Welle des theoretisch unendlichen Systems heraus, so erreichen wir unsern Zweck, den Zusammenhang zwischen der Länge des Berges und der des Tales, folgendermassen: Wir bilden die Differenz der Knotenpunkte, indem wir aus unserer Trochoidengleichung die für $y = 0$ gefundenen Werte entsprechend für x einsetzen. Es ergibt sich für den

Berg der Wert $x_3 - x_2$, während das Tal durch die Differenz $x_4 - x_3$ dargestellt wird. Also:

$$x_3 - x_2 = \frac{\lambda}{2} - 2\,h$$

$$x_4 - x_3 = \frac{\lambda}{2} + 2\,h$$

$$(x_4 - x_3) - (x_3 - x_2) = 4\,h$$

oder in Worten:

Das Wellental ist um 4 h länger als der Wellenberg.

Mit diesem Ergebnis finden auch die überschäumenden Wellen ihre Erklärung.

Diese Trochoidentheorie führt nun zu folgenden Formeln für die einzelnen Wellenelemente, zwar unter der Voraussetzung, dass es sich um sehr grosse Tiefen im Verhältnis zur Wellenlänge handelt, was ja im offenen Ozean meistens der Fall ist. In diesen Formeln bezeichnet:

λ die Wellenlänge, d. h. die Entfernung von Wellenkamm zu Wellenkamm,

h die halbe Wellenhöhe, gleich der halben Entfernung von der Talsohle bis zum Kamm der Welle,

τ die Periode der Welle, d. i. die Zeit, die ein Wasserteilchen braucht um seinen Umlauf zu vollenden, oder was das Gleiche ist, welche die Welle braucht, um eine Strecke $= \lambda$ zu durchlaufen,

c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle,

v die Orbitralgeschwindigkeit, d. i. die Geschwindigkeit, mit der die Moleküle ihre Kreisbahnen durchlaufen,

g und π = die bekannten Zahlen der Beschleunigung durch die Schwerkraft $\left(= 981 \frac{cm}{sec^2} \right)$ und die Ludolfsche Zahl.

Aus der Mechanik leiten wir für τ die Formel ab:

II. $$\tau = \sqrt{\frac{2\pi}{g}\lambda}$$

es haben also längere Wellen immer eine längere Periode als kürzere. Da nun

III. $$c = \frac{\lambda}{\tau}$$

ist, so folgt:

IV. $$c = \sqrt{\frac{g}{2\pi}\lambda}$$

Die Richtigkeit dieser Formel [1]) wird u. a. bestätigt durch eine Messung von Pâris im Jahre 1867. Gemessen wurde $c = 15$ m, $\lambda = 135$ m. Setzen wir diesen Wert von λ in IV ein, so findet man:

$$c = \sqrt{\frac{9{,}81 \cdot 135}{6{,}28}} = 14{,}5 \text{ m.}$$

Die Wellenlänge ist nun gleich dem Umfange des die Trochoide erzeugenden Rollkreises ($= 2\pi r$), infolgedessen ist c durch r ausgedrückt

V. $$c = \sqrt{2gr}$$

also gleich der Geschwindigkeit, die ein freifallender

---

[1]) W. Thomson, Phil. Mag. 1871, p. 374.

Körper besitzt, der die Strecke $\frac{r}{2}$ herabgefallen ist. Die Periode ist ferner direkt proportional der Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

VI. $$\tau = \frac{2\pi}{g} c,$$

oder wenn wir sie durch r ausdrücken:

VII. $$\tau = 2\pi r \sqrt{\frac{2}{g}},$$

d.h. nach Gerstner[1]): „Die Länge eines mit der Welle gleichzeitig schwingenden Pendels ist doppelt so gross, als der Halbmesser des die Wasserzykloide beschreibenden Rades, oder diese Pendellänge (4 r) verhält sich zur Breite der Wellen (2 π r), wie der Durchmesser eines Kreises (2) zu seiner halben Peripherie."

Newton war der Meinung[2]), daß diese Pendellänge der Breite der Wellen beinahe gleich sei: „Igitur inter transitum undarum singularum tempus erit, oscillationum duarum, hoc est, unda describet latitudinem suam, quo tempore pendulum illud bis oscillatur sed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla est, ideoque aequat undarum latitudinem, oscillatur semel."

Die Geschwindigkeit durch τ ausgedrückt ist

VIII. $$c = \frac{g}{2\pi} \tau$$

[1]) Gilbers Ann., 32. Bd. 1809, p. 412.

[2]) Phil. nat. prim. math. Lib. II, p. 358, 16.

demnach

IX. $$\lambda = \frac{2\pi}{g} c^2; = \frac{g}{2\pi} \tau^2$$

Die Orbitralbahn der Moleküle ist nur an der Oberfläche ein Kreis und wird mit zunehmender Tiefe elliptisch, um schliesslich in eine gerade Linie überzugehen, d. h. die Moleküle schwingen in sehr grossen Tiefen nur in horizontaler Richtung, ein Wellenschlag ist hier demnach nicht mehr zu spüren [1]).

Dies Kleinerwerden der Radien drückt Bertin durch folgende Gleichung aus:

Xa. $$\rho = h e^{2\pi \frac{z}{\lambda}}$$

oder

Xb. $$\log \frac{\rho}{h} = -2\pi M \frac{z}{\lambda}$$

was Hagen [2]) folgendermassen umformt:

Xc. $$\rho = r e^{\frac{z}{\lambda}}$$

wo M — den Modulus der gemeinen Logarithmen,

e = die Basis der natürlichen Logarithmen und

z = die Wassertiefe in m bezeichnet.

---

[1]) Vergl. auch die Tabelle auf Seite 35.

[2]) Handbuch d. Wasserbaukunst, 3. Teil, Bd. 1, Berlin 1863, p. 3—104.

Jedoch kann man für praktische Rechnungen dieses Verhältnis einfacher und genau genug folgendermassen wiedergeben: „Drücken wir die Tiefe in Neunteln der Wellenlänge aus, so nehmen die Durchmesser (2ρ) der Kreisbahnen für jedes zukommende Neuntel der Tiefe um die Hälfte ab.“

Als Beispiel diene folgendes:
wenn

$$\lambda = 0,\ {}^1/_9,\ {}^2/_9,\ {}^3/_9,\ {}^4/_9,\ {}^5/_9,\ {}^8/_9 \text{ etc.}$$

ist, dann wird 2ρ in Bruchteilen der ganzen Wellenhöhe

$$2\rho = 1,\ {}^1/_2,\ {}^1/_4,\ {}^1/_8,\ {}^1/_{16},\ {}^1/_{32},\ {}^1/_{256} \text{ etc.}$$

Folgende Tabelle[1]) zeigt die für verschiedene Werte von τ nach den Formeln IV, VIII, IX und X berechneten Werte für λ, c und ρ in verschiedenen Tiefen, wenn $\frac{H}{2}$ gegeben ist.

[1]) Nach Bertin, sur la théorie et l'observation de la houle et du roulis, 1871.

τ	λ	c	Verhältnis $\frac{\rho}{h}$ in d. versch Tiefen Z =				
sec	m.	m. p. s.	2 m	10 m	20 m	50 m	100 m
2	6,2	3,12	0.134	0.000	0.000	0.000	0.000
3	14,1	4,70	0.410	0.012	0.000	0.000	0.000
4	25	6,20	0.605	0.080	0.007	0.000	0.000
5	39	7,80	0.725	0.200	0.040	0.000	0.000
6	56	9,37	0,800	0.327	0.107	0.004	0.000
7	77	10,93	0,848	0.440	0.193	0.016	0.000
8	100	12,49	0,882	0.533	0.283	0.043	0.002
9	126	14,05	0.905	0.608	0.370	0.083	0.007
10	156	15,61	0.923	0.668	0.447	0.134	0.018
11	189	17,17	0.936	0.717	0.514	0.190	0.036
12	225	18,73	0.946	0.756	0.572	0.247	0.061
14	306	21,85	0.960	0.814	0.664	0.358	0.128
16	396	24,98	0.969	0.863	0.728	0.452	0.205
18	506	28,10	0.975	0.883	0.780	0.537	0.289
20	624	31,22	0.980	0.904	0.818	0.605	0.366
22	762	34,34	0.984	0.921	0.848	0.662	0.438
24	892	37,46	0.986	0.932	0.870	0.705	0.497

Die Orbitralgeschwindigkeit ist:

XI. $$v = c\frac{h}{r}$$

ihr Verhältnis zu c ist, indem wir r durch λ ausdrücken;

XII. $$\frac{v}{c} = 2\pi\frac{h}{\lambda}.$$

Es ist hierzu zu bemerken, dass der Quotient $\frac{h}{\lambda}$ immer ein echter Bruch ist, dessen Wert nach der Theorie abnehmen kann von seinem Maximum $1 : \pi$ (bei der Zykloide) bis zu unendlich kleinen Grössen.

Über den Zusammenhang zwischen der Wellenhöhe und der Windgeschwindigkeit auf offner See hat der Admiral Coupvent des Bois[1]) Messungen angestellt, die nach der Zusammenstellung von Krümmel eine sehr einfache Beziehung zwischen diesen beiden Grössen angibt, den es trifft annähernd zu, dass

$$H \quad \frac{1}{2} w$$

ist, wie aus folgenden Daten ersichtlich:

Windgeschw. m	3	5,5	7	8	10	14	18	25
H. beobachtet m	1,4	2,0	2,7	3,8	5,2	7,0	9,3	12,0
H. berechnet m	1,5	2,7	3,5	4,0	5,0	7,0	9,0	12,5

[1]) Comptes Reudus de l'Acad., 1866, t. 62, p. 82.

Auch die Pârisschen Messungen[1]) stimmen im grossen und ganzen mit der Formel überein.

Seegang	Mittlere Windgeschw.[2])	Wellenhöhe		
	m. p. s.	Mittel.	Max.	Min.
Sehr hohe See .	16	7,75	11,5	6,5
Hohe See . . .	13	5,05	7,5	3,5
Grobe See . . .	10	3,55	6,5	2,3
Hohe Dünung .	8	4,10	7,0	3,0
Dünung	7	2,40	4,5	1,0
Leichter Seegang	6,8	1,6	4,0	0,8

Inwieweit nun die angegebenen Formeln und mithin die Trochoidentheorie als zutreffend gelten, lässt sich am besten an der Hand gemachter Beobachtungen beurteilen, die Pâris angestellt hat[3]), und die in folgender Tabelle mit den berechneten Daten zusammengestellt sind.

---

[1]) Rev. mar. et col. ect., p. 121.

[2]) Nach Köppen, Segelhandbuch f. d. atlant. Ozean, p. 45, korrigiert.

[3]) Rev. mar. et col. etc. pag. 119.

Meeresteil	Geschwindigkeit			Länge (m)			Periode (sec)		
	beobachtet	m. pro sec berechnet aus:		beobachtet	berechnet aus:		beobachtet	berechnet aus:	
		$\sqrt{\frac{g}{2\pi}\lambda}$	$\frac{g}{2\pi}\tau$		$\frac{2\pi}{g}c^2$	$\frac{g}{2\pi}\tau^2$		$\sqrt{\frac{2\pi}{g}\lambda}$	$\frac{2\pi}{g}c$
Atlant. Passatgbt. . . .	11,2	10,8	10,5	65	70	61	5,8	6,0	6,2
Südatlant. Westwde. . .	14,0	15,5	17,1	133	109	163	9,5	8,6	7,8
Indische Westwde. . . .	15,0	15,2	13,7	114	125	104	7,6	8,0	8,3
Indisches Passatgbt. . .	12,6	13,1	13,7	96	88	104	7,6	7,3	6,9
Ostchin. Meer	11,4	11,9	12,4	79	72	86	6,9	6,6	6,3
Westpazif. Meer	12,4	13,6	14,7	102	85	121	8,2	7,5	6,9

Vergleichen wir nun die berechneten mit den beobachteten Daten, so müssen wir folgendermassen urteilen:

1.) Die theoretischen Werte für die Geschwindigkeit müssen als gut übereinstimmend mit den beobachteten genannt werden, da sie nur in zwei Fällen grössere Differenzen aufweisen.

2.) Auch für die Wellenlänge muss die Theorie als richtig anerkannt werden, da die aus den Formeln berechneten Werte nur im südatlantischen Passatgebiet von der Beobachtung erheblich abweichen, im grossen ganzen jedoch ebenso oft zu gross wie zu klein sind.

3.) Die Periode stimmt mit den Messungen gut überein.

Zum Schluss kommen wir zu dem Resultat, dass die wirklichen Beziehungen zwischen c, λ und τ durch die Trochoidentheorie, wie wir sie für Wasserwellen auf offenem Ozean bei unendlicher Tiefe (im Vergleich zur Wellenlänge) aufgestellt haben, eine genaue Lösung findet, zumal wenn wir berücksichtigen, daß wir die Genauigkeit der Messungen, bei der überaus grossen Schwierigkeit der praktischen Ausführbarkeit, nicht allzu hoch schätzen dürfen, und da gerade diese Messungen in bezug auf die Höhe der Wellen am meisten auf Schwierigkeiten stösst, ist es vermisst worden, dass bis jetzt die Theorie keine Beziehungen zwischen ihr und den anderen Wellenelementen ergibt.

IV.

Die Zusammensetzung mehrerer Wellen.

Da sich im Verlaufe unserer Untersuchungen für den normalen Schnitt der Wasserwelle eine trochoidale Kurve ergeben hat, die in Gleichung I. ausgedrückt ist, so ist die Frage, welche Kurve entsteht durch Zusammensetzung mehrerer verschiedener Wellen.

Der Einfachheit halber wurde in Zeichnung Taf. I. für die Kurve eine Transversalwelle angenommen. Mathematisch hätten wir für eine solche die Gleichung:

$$y = h \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

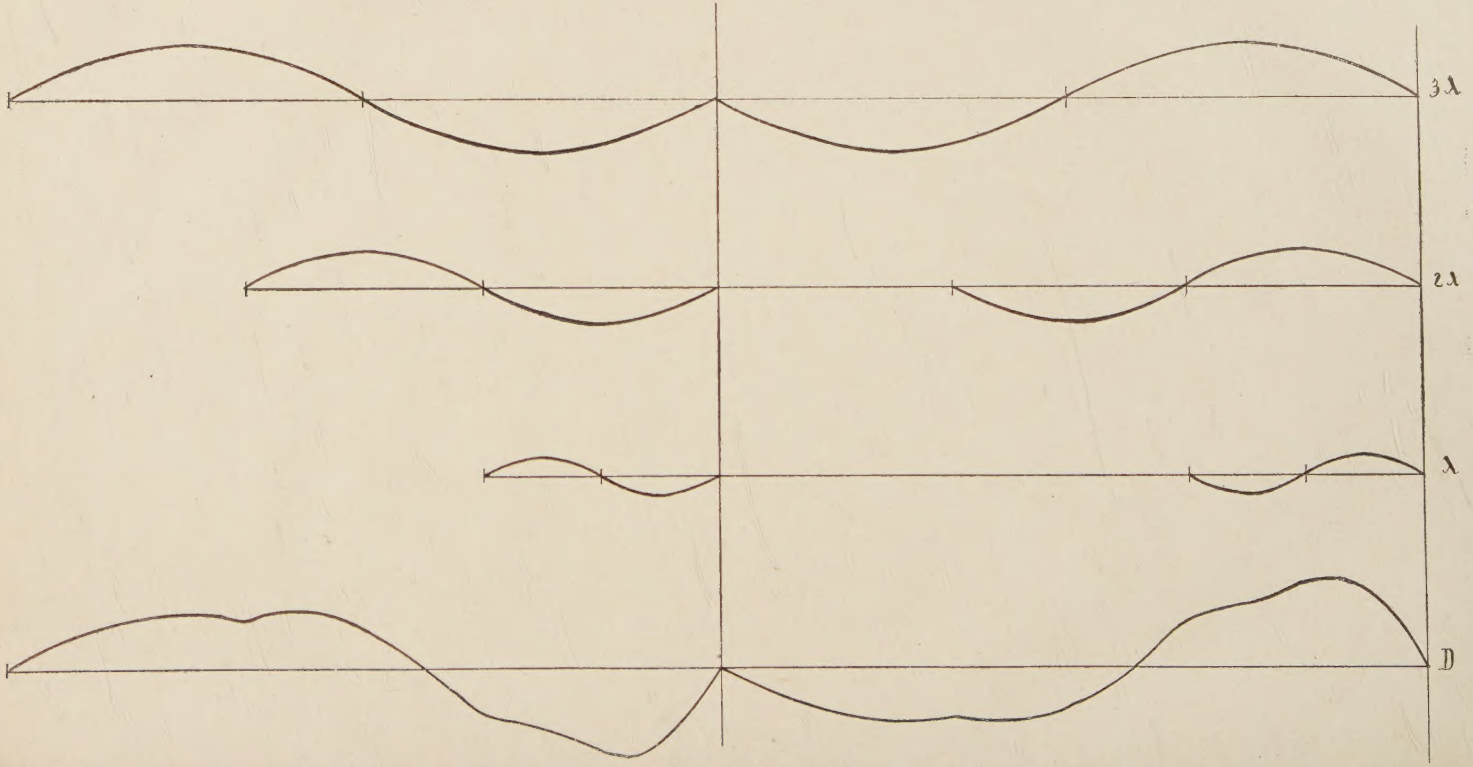
zugrunde zu legen. Die resultierende Gesamtdeviation = D ist die Summe der Einzelabweichungen, wobei das Prinzip der Zusammensetzung kleinster Bewegungen Anwendung findet. Wollte man die einzelnen Grössen durch Zahlen ausdrücken, so hätte man die entsprechenden Werte für die einzelnen Glieder in Rechnung zu setzen.

In der Zeichnung wurde das Verhältnis der Wellenlängen und der Höhen wie 1 : 2 : 3 angenommen.

Wir haben es also hier mit einer Interferenzerscheinung zu tun und wollen uns damit begnügen zwei spezielle Fälle mit einander zu vergleichen, wie sie in Tafel I. graphisch dargestellt sind. Die rechte Seite der Tafel unterscheidet sich von der linken um eine Phasenverschiebung $= \frac{\lambda}{2}$. In beiden Fällen erfolgt die Schwingung gleichsinnig. Durch Konstruktion ergibt sich dann in D die geometrisch resultierende Welle.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Veranlassung des Herrn Professor Dr. phil. et med. L. Matthiessen ausgeführt.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, diesem meinen hochverehrten Lehrer meinen verbindlichsten Dank für die Überlassung des Themas und die freundliche Unterstützung bei der Bearbeitung derselben auszusprechen.

Gleichzeitig spreche ich nochmals an dieser Stelle Herrn Professor Dr. Schott von der Deutschen Seewarte in Hamburg für freundliche Überlassung von Literaturangaben meinen besten Dank aus.

Tafel I.